

1. Semaine 6b. Moment de flexion et axe neutre

Question 1 – Comparer deux poutres avec différentes sections

Deux poutres avec des sections différentes sont illustrées sur la **Figure 1.1**. Calculer :

- Le moment d'inertie (I_{z,y_0}). Attention à l'axe !
- Le module de section S .
- L'aire de la section transversale et le rapport $\frac{S}{A}$ pour les dimensions suivantes
- Quelle poutre est plus efficace (meilleur S/A). pourquoi ?

cas A: $b = 30 \text{ cm}$, $d = 40 \text{ cm}$, $b_1 = 6 \text{ cm}$, $d_1 = 32 \text{ cm}$

cas B: $b = 40 \text{ cm}$, $d = 30 \text{ cm}$, $b_1 = 32 \text{ cm}$, $d_1 = 6 \text{ cm}$

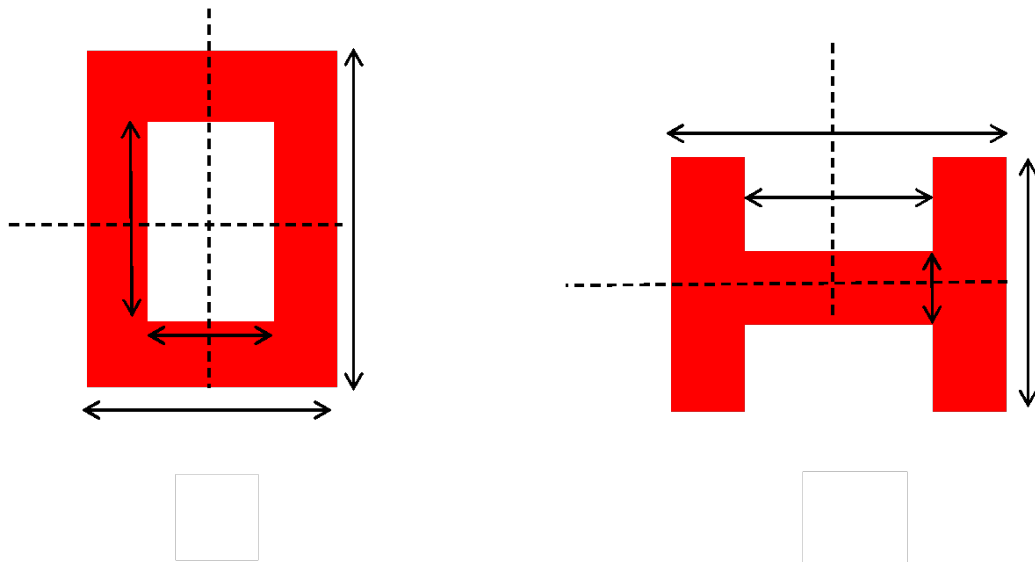


Figure 6b.1 | Sections transversales des poutres

Solution

Ce qui est donné ?

Les dimensions de la section.

Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.

Ce qui est demandé ?

Le moment d'inertie (I_{z,y_0}) autour de l'axe horizontal z et de l'axe neutre y_0

Le module de section S

L'aire de la coupe transversale A et $\frac{S}{A}$

Principes et formules

Le moment d'inertie I_{z,y_0} d'une aire A par rapport à un axe y arbitraire est :

$$I_{z,y_0} = \iint_A (y - y_0)^2 dy dz \quad (1.1)$$

Pour la section transversale (A), la poutre à section transversale de forme creuse est constituée de 2 composantes, un cadre rectangulaire et une région creuse rectangulaire. Par conséquent, le moment d'inertie sera égal à la différence entre le cadre rectangulaire et la région creuse rectangulaire. Le moment d'inertie est :

$$I_A = I_1 - I_2 = \iint_{A_1} y^2 dy dz - \iint_{A_2} y^2 dy dz \quad (1.2)$$

Où A_1 fait référence à l'aire totale du cadre rectangulaire plus la région creuse rectangulaire et A_2 à l'aire de la région creuse rectangulaire (voir la **Figure 1.2** pour les schémas des aires).

$$I_{(A)} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \right) y^2 dy - \int_{-\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \left(\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} dz \right) y^2 dy \quad (1.3)$$

$$I_{(A)} = \frac{bd^3}{12} - \frac{b_1d_1^3}{12} = \frac{bd^3 - b_1d_1^3}{12}$$

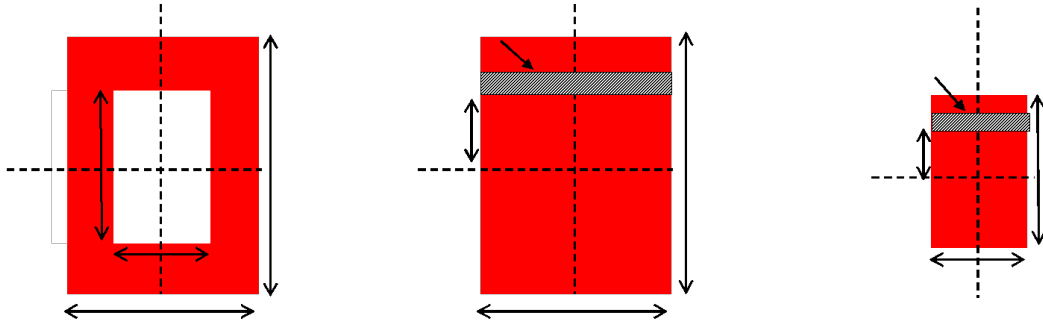


Figure 1.2 | Diagramme des aires pour la poutre de section transversale A. Section pleine d'aire A_1 et section « vide » d'aire A_2

Pour la **poutre de section transversale (B)** il est possible de procéder soit par addition, soit par soustraction des aires.

Pour l'addition des aires, la poutre est divisée en 3 composantes illustrés sur la **Figure 1.3** :

$$I_{(B)} = I_1 + I_2 + I_3 = \iint_{A_1} y^2 dy dz + \iint_{A_2} y^2 dy dz + \iint_{A_3} y^2 dy dz \quad (1.4)$$

Placer d'abord les limites de l'intégration :

$$I_{(B)} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{b_1}{2}} dz \right) y^2 dy + \int_{-\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \left(\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} dz \right) y^2 dy + \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\int_{\frac{b_1}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \right) y^2 dy \quad (1.5)$$

Puis intégrer les termes en z et y :

$$I_{(B)} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{b - b_1}{2} y^2 dy + \int_{-\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} b_1 y^2 dy + \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{b - b_1}{2} y^2 dy \quad (1.6)$$

$$I_{(B)} = \frac{(b - b_1)d^3}{24} + \left(\frac{b_1 d_1^3}{12} \right) + \frac{(b - b_1)d^3}{24} = \frac{b_1 d_1^3 + (b - b_1)d^3}{12} \quad (1.7)$$

Pour la soustraction des aires, la poutre est divisée en 3 composantes illustrés sur la **Figure 1.x** :

$$I_{(B)} = I_4 - I_5 - I_6 = \iint_{A_4} y^2 dy dz - \iint_{A_5} y^2 dy dz - \iint_{A_6} y^2 dy dz \quad (1.4)$$

Placer d'abord les limites de l'intégration :

$$I_{(B)} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \right) y^2 dy - \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \left(\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} dz \right) y^2 dy - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} dz \right) y^2 dy \quad (1.5)$$

Puis intégrer les termes en z et y (on remarque par symétrie que $I_2 = I_3$) :

$$I_{(B)} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} b y^2 dy - 2 \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d}{2}} b_1 y^2 dy \quad (1.6)$$

$$I_{(B)} = \frac{bd^3}{12} - 2 \left(\frac{b_1 d^3}{24} - \frac{b_1 d_1^3}{24} \right) = \frac{b_1 d_1^3 + (b - b_1) d^3}{12} \quad (1.7)$$

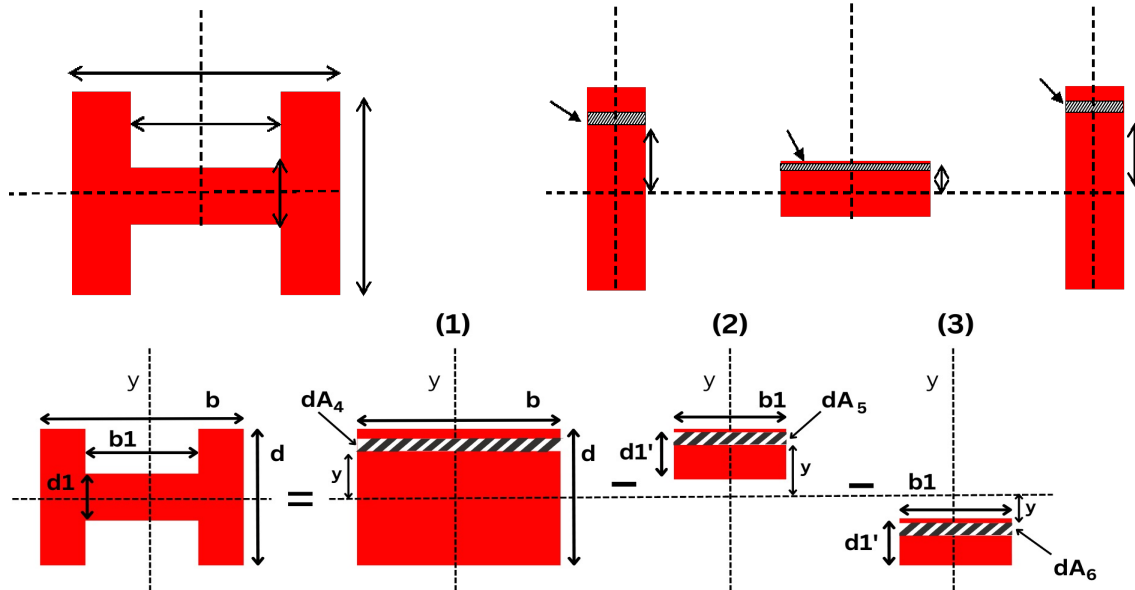


Figure 1.3 | Diagrammes des aires pour la poutre de section transversale A pour l'addition et la soustraction des aires

Nous appliquons la définition du module de section :

$$S = \frac{I_{z,y_0}}{c} \quad (1.8)$$

Avec c étant la distance maximale à l'axe neutre. Comme dans toutes les coupes transversales de l'exercice, les coupes sont symétriques ($c = \frac{d}{2}$) et ainsi :

$$S = 2 \frac{I_{z,y_0}}{d} \quad (1.9)$$

(A)

$$S_A = \frac{bd^2 - \frac{b_1 d_1^3}{d}}{6} \quad (1.10)$$

(B)

$$S_B = \frac{\frac{b_1 d_1^3}{d} + (b - b_1) d^2}{6} \quad (1.11)$$

(A) de l'Eq. (1.10):

$$A = b \cdot d - b_1 d_1 = (30)(40) - (6)(32) = 1.00 * 10^3 \text{ cm}^2 \quad (1.12)$$

$$S_A = \frac{(30)(40)^2 - (6)(32)^3/40}{6} = 7.18 * 10^3 \text{ cm}^3 \quad (1.13)$$

$$\frac{S_A}{A_{(A)}} = 7.18 \text{ cm} \quad (1.14)$$

(B) de l'Eq. (1.11)

$$S_B = \frac{(32)(6)^3/30 + (40 - 32)(30)^2}{6} = 1.24 * 10^3 \text{ cm}^3 \quad (1.15)$$

$$A = b_1 d_1 + d(b - b_1) = (6)(32) + (30)(40 - 32) = 0.43 * 10^3 \text{ cm}^2 \quad (1.16)$$

$$\frac{S_B}{A_{(B)}} = 2.88 \text{ cm} \quad (1.17)$$

$$\frac{S_A}{A_{(A)}} > \frac{S_B}{A_{(B)}} \quad (1.18)$$

Rappel :

$$|\sigma_{x, \max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z, y_0}} c = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

Donc plus S est grand, plus la contrainte sera petite pour un moment interne donnée. Mais on souhaite utiliser le moins de matériau possible pour réaliser la poutre : c'est -à-dire qu'on aimerait une section A qui soit la plus petite possible. D'où l'intérêt de calculer non seulement S, mais aussi S/A.

La poutre de section transversale (A) est la plus efficace des 2 sections transversales par rapport au module de section pour un même volume de matériau.

La section en forme de « I » n'est pas très efficace pour une flexion selon l'axe z, mais serait fort efficace pour une flexion selon l'axe y (car beaucoup de matériau serait alors loin de l'axe). Comparez à la question 3, où le « I » est tourné de 90°.

Question 2 – Flexion d'une poutre avec une section triangulaire

Une poutre encastrée AB de section triangulaire a une longueur $L = 2\text{ m}$, une largeur $b = 40\text{ mm}$ et une hauteur $h = 50\text{ mm}$ (voir **Figure 2.1**). La poutre est en laiton. La densité est $\gamma = 8000\text{ kg/m}^3$.

Attention, pour cet exercice, le poids de la poutre n'est pas négligé.

- Calculez les forces de réaction et le moment dus au poids de la poutre.
- Calculez puis dessinez les forces de cisaillement le long de la poutre
- Calculez puis dessinez le moment de flexion le long de la poutre
- Trouvez l'axe neutre
- Calculez les contraintes normales maximales en compression σ_{cmax} et en traction σ_{tmax} dus au poids de la poutre.

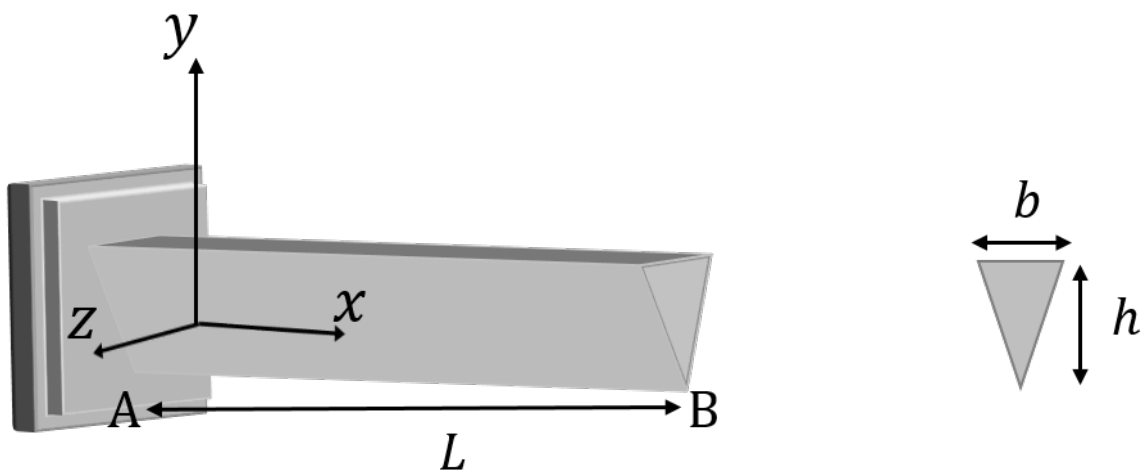


Figure 2.1 | Une poutre en porte-à-faux avec une section transversale triangulaire

Solution

Ce qui est donné :

- $L = 2000 \text{ mm}$
- $b = 40 \text{ mm}$
- $h = 50 \text{ mm}$
- $\gamma = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ soit $80 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$

Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.

Ce qui est demandé :

- Valeur des forces et moments de réaction
- Diagramme des forces de cisaillement
- Diagramme du moment de flexion
- Contrainte de compression maximale σ_{cmax} et contrainte de traction maximale σ_{tmax} dans la poutre dus à son propre poids

Principes et formules

Force de réaction aux points A et B et moment au point A

Nous calculons les forces de réaction à partir du diagramme du corps libre de l'ensemble de la poutre illustré sur la **Figure 2.2**.

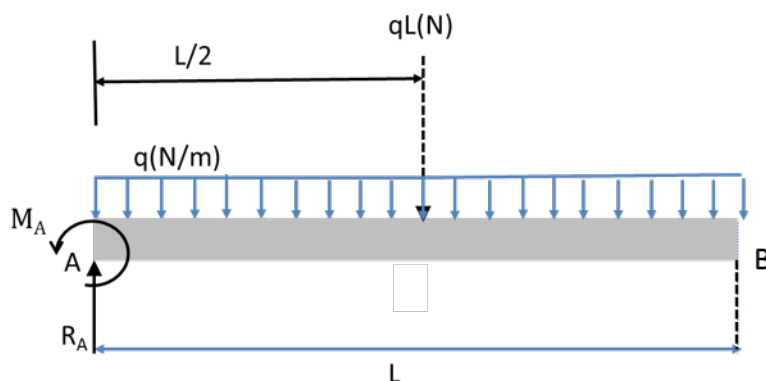


Figure 2.2 | Diagramme des forces

Le poids de la poutre agit uniformément sur la longueur de la poutre, nous pouvons donc la décrire par une charge répartie q qui est définie comme :

$$q = \gamma A = \frac{\gamma b h}{2} \quad (2.1)$$

L'équilibre des forces en y donne :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{A,y} - \int_0^L q \, dx = R_{A,y} - \frac{\gamma b h L}{2} = 0 \quad (2.2)$$

$$R_{A,y} = \frac{\gamma b h L}{2} = 160 \text{ N} \quad (2.3)$$

A partir de l'équilibre du moment M_z autour de A, on obtient le moment de réaction M_A :

$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M_A - \int_0^L q \cdot x \, dx = M_A - \frac{\gamma b h L^2}{4} = 0 \quad (2.4)$$

Ce qui nous donne :

$$R_A = qL = 160 \text{ N et } M_A = \frac{qL^2}{2} = 160 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (2.5)$$

Diagramme des forces de cisaillement

En $x(A)$, la force de cisaillement est calculée par (rappelez-vous que la force de cisaillement V est positive pointant vers le bas pour la coupe de gauche) :

$$R_A - V(x = 0) = 0 \rightarrow V(x = 0) = 160 \text{ N} \quad (2.6)$$

De $x(A)$ vers $x(B)$,

$$V(x) = R_A - qx = \left(160 \text{ N} - 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x\right) \quad (2.7a)$$

On peut aussi utiliser la relation différentielle $V(x) = \int_{\square}^{\square} q(x) \cdot dx$:-

$$V(x) = \int_0^x -q \, dx' + V(x = 0) = \left(160 \text{ N} - 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x\right) \quad (2.7b)$$

En utilisant ces valeurs, nous dessinons le diagramme des forces de cisaillement :

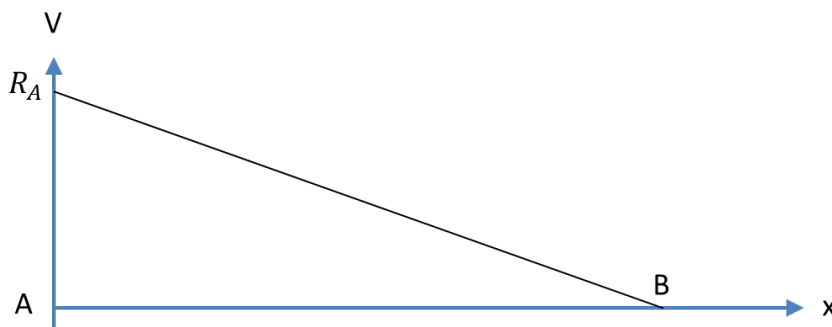


Figure 2.3 | Diagramme de la force de cisaillement

Diagramme du moment de flexion

Nous savons que :

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = V(x) \quad (2.8)$$

$$\int_0^x dM = \int_0^x V(x') \, dx' = \int_0^x (R_A - qx') \, dx' \quad (2.9)$$

$$M(x) - M(x = 0^+) = R_A x - \frac{qx^2}{2} \rightarrow M(x) = -M_A + R_A x - \frac{qx^2}{2} \quad (2.10a)$$

Il est également possible d'utiliser la méthode des sections. En utilisant la partie de droite avec $M(x = L) = 0$ car aucun moment n'est appliqué à droite de la poutre:

$$M(x) - M(x = L) = \int_x^L q(u - L) du \rightarrow M(x) = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2} \quad (2.10b)$$

$$M(x) = -M_A + R_A x - \frac{qx^2}{2}$$

En utilisant ces valeurs, nous dessinons le diagramme du moment de flexion.

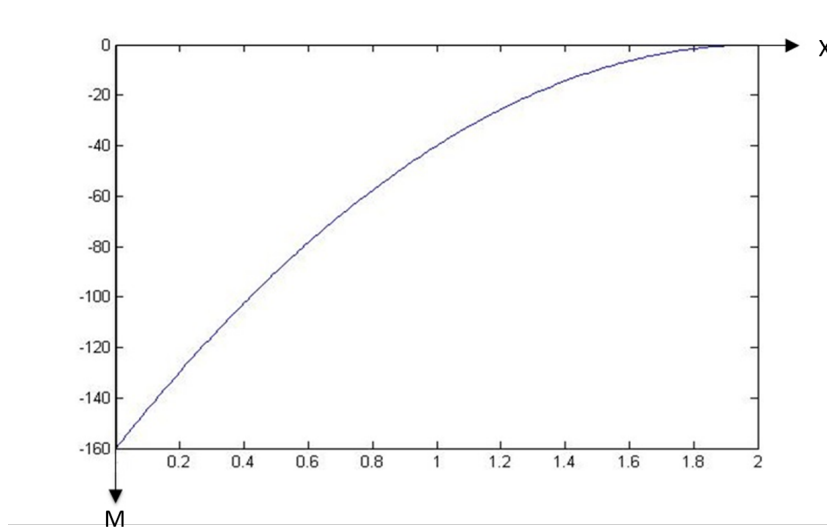


Figure 2.4 | Diagramme du moment de flexion

Contraintes maximales en compression et en traction dues à la flexion

La contrainte interne normale à la section transversale est donnée par :

$$\sigma(x, y) = -\frac{M_{int}}{I_{z, y_0}}(y - y_0) \quad (2.11)$$

où y_0 est la position de l'axe neutre. $y_0 = \frac{\int_{triangle} y dydz}{\int_{triangle} dydz}$.

Nous calculons d'abord la position de l'axe neutre y_0 par rapport à l'origine que nous définissons en bas du triangle (voir **Figure 2.5**). **Attention, il faut intégrer y sur la surface A de la section triangulaire, et pas sur une surface rectangulaire.** Pour effectuer ce calcul, nous devons d'abord déterminer la largeur selon z de la section transversale en fonction de la coordonnée verticale y, et est donnée par l'Eq. (2.12), après avoir utilisé la proportionnalité des triangles :

$$b(y) = \frac{b}{h}y \quad (2.12)$$

Pour un y donné z varie de $-b(y)$ à $+b(y)$. Alors y_0 peut être calculé :

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \frac{\int_{triangle} y dA}{\int_{triangle} dA} = \frac{\int_0^h \left(\int_{-\frac{b(y)}{2}}^{\frac{b(y)}{2}} dz \right) y dy}{\int_0^h \left(\int_{-\frac{b(y)}{2}}^{\frac{b(y)}{2}} dz \right) dy} = \frac{\int_0^h \left(\int_{-\frac{by}{2h}}^{\frac{by}{2h}} dz \right) y dy}{\int_0^h \left(\int_{-\frac{by}{2h}}^{\frac{by}{2h}} dz \right) dy} \\
 &= \frac{\int_0^h \frac{by}{h} y dy}{\int_0^h \frac{by}{h} dy} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} \\
 &= \frac{2}{3} h
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Et maintenant, nous pouvons trouver les valeurs maximales de traction et de compression pour chaque position de x , toujours en considérant que $M(x) < 0 \forall x$:

$$\sigma_{max,t}(x) = \frac{M_{max}}{I_{z,y_0}} \frac{h}{3} \quad \& \quad \sigma_{max,c}(x) = \frac{M_{max}}{I_{z,y_0}} \frac{2h}{3} \tag{2.14}$$

Afin de trouver le moment quadratique (d'inertie) autour de l'axe Z dans le plan yz nous utilisons la formule :

$$I_{z,y_0} = \iint_A (y - y_0)^2 dA = \int_0^h \left(\int_{-\frac{by}{2h}}^{\frac{by}{2h}} dz \right) (y - y_0)^2 dy = \int_0^h \frac{by}{h} (y - y_0)^2 dy \tag{2.15}$$

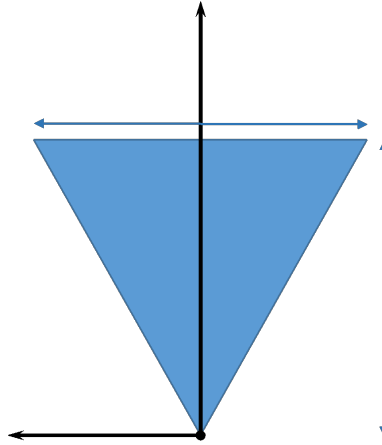


Figure 2.5| Section triangulaire

$$I_{z,y_0} = \frac{b}{h} \int_0^h y(y - y_0)^2 dy = \frac{b}{h} \int_0^h (y^3 - 2y_0 y^2 + y_0^2 y) dy = \frac{b}{h} \left(\frac{y^4}{4} - \frac{2y_0 y^3}{3} + \frac{y_0^2 y^2}{2} \right)_0^h \tag{2.16}$$

$$I_{z,y_0} = \frac{b}{h} \left(\frac{y^4}{4} - \frac{2y_0 y^3}{3} + \frac{y_0^2 y^2}{2} \right)_0^h = \frac{b}{h} \left(\frac{h^4}{4} - \frac{4h^4}{9} + \frac{4h^4}{18} \right)_0^h = \frac{bh^3}{36} (9 - 8) = \frac{bh^3}{36} \tag{2.17}$$

$$I_{z,y_0} = \frac{bh^3}{36} = 1.39 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \tag{2.18}$$

En utilisant l'Eq. (2.14) et l'Eq. ((2.18), nous obtenons (avec une distance de $c=2/3h$ et de $c=1/3h$ pour la distance entre l'axe neutre du triangle et les bords supérieur et inférieur de la poutre)

$$\sigma_{max,t} = \frac{M_{max} h}{3I_{z,y_0}} = 19.2 \text{ MPa} \quad (2.19)$$

$$\sigma_{max,c} = \frac{M_{max} 2h}{3I_{z,y_0}} = 38.4 \text{ MPa} \quad (2.20)$$

Question 3 – Charges distribuée et ponctuelle avec $M(x)$ donné

Une poutre simplement supportée est illustrée ci-dessous sur la **Figure 3.1**. Nous allons comparer deux sections, voir **Figure 3.3**.

Nous vous donnons moment de flexion le long de la poutre, voir **Figure 3.2**.

Trouvez :

- La contrainte normale maximale due à la flexion pour les sections A (rectangulaire) et B (en « I »)
- Quelle section est la plus efficace (calculer S/aire) ?
 - Pour la section rectangulaire : $b = 30 \text{ cm}$, $d = 40 \text{ cm}$
 - Pour la section en 'I' : $b_1 = 6 \text{ cm}$, $d_1 = 32 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$, $d = 40 \text{ cm}$

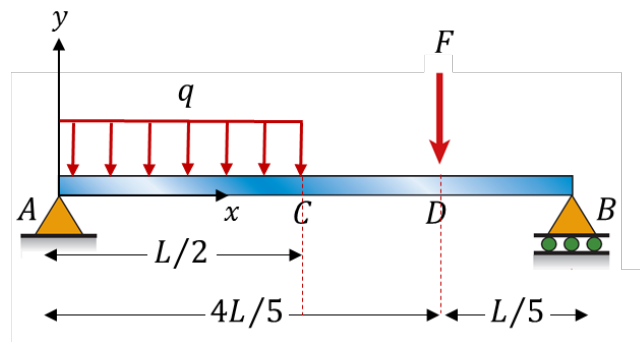


Figure 3.1 | Poutre AB. $q=20\text{N/m}$. $F=10 \text{ N}$. $L=4\text{m}$

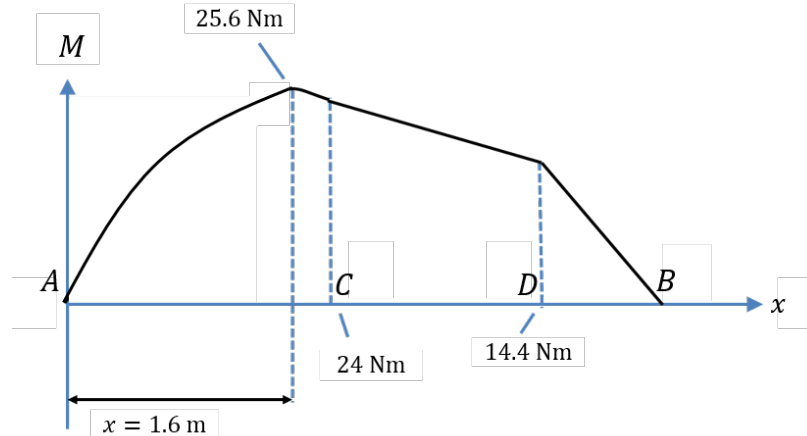


Figure 3.2 | Moment de flexion $M(x)$ le long de la poutre

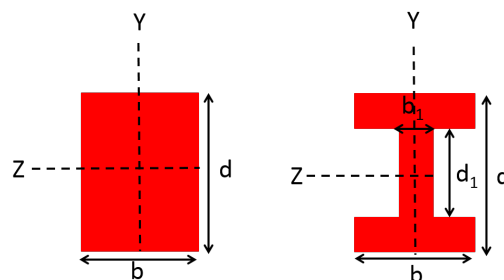


Figure 3.3 | Sections: rectangulaire (A) et en forme de « I » (B).

Solution

Ce qui est donné :

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 40 \text{ cm}$$

$$b_1 = 6 \text{ cm}$$

$$d_1 = 32 \text{ cm}$$

$$M = 25.6 \text{ Nm}$$

Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.

La section de la poutre dans le plan yz n'est pas déformée.

Ce qui est demandé ?

- Trouver la contrainte normale maximale due à la flexion dans les deux sections transversales.
- Déterminer quelle section transversale est la plus efficace ? c'est-à-dire : pour un moment de flexion donné, dans la section est-ce que la contrainte sera plus faible ? Donc comparer $S = I/c$ pour les deux sections.

Principes et formules

Pour trouver la contrainte normale maximale, nous commençons par la formule de flexion :

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_{int}}{I_{z, y_0}}(y - y_0) \quad (3.1)$$

La contrainte normale maximale dans la poutre est située là où le moment de flexion est maximal:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} c}{I_{z, y_0}} \quad (3.2)$$

où c est la distance maximale entre une surface de la poutre par rapport à l'axe neutre.

Le moment fléchissant maximal M est à $x = 1.6 \text{ m}$. Vu la géométrie des sections (axe neutre au milieu de la poutre dans les 2 cas), la distance maximale de l'axe neutre est $c = \frac{d}{2}$ pour les deux sections A et B.

La contrainte normale maximale $\sigma_{max, A}$ de la section rectangulaire (A) est :

$$\sigma_{max, A} = \frac{M \cdot \frac{d}{2}}{I_{z, y_0, A}} = \frac{M \cdot \frac{d}{2}}{\frac{bd^3}{12}} = \frac{6M}{bd^2} = 3.20 \text{ [kPa]} \quad (3.3)$$

Le moment d'inertie $I_{z, y_0, B}$ pour la section transversale "I" est calculé en soustrayant la contribution des 2 régions creuses du moment d'inertie de la section rectangulaire calculé ci-dessus :

$$I_{z, y_0, B} = \frac{bd^3}{12} - \frac{(b - b_1)d_1^3}{12} \quad (3.4)$$

La contrainte normale maximale $\sigma_{max, B}$ de la section transversale en "I" (B) est:

$$\sigma_{max, B} = \frac{M \cdot \frac{d}{2}}{I_{z, y_0, B}} = 5.42 \text{ [kPa]} \quad (3.5)$$

Enfin, nous trouvons que $\sigma_{max, A} < \sigma_{max, B}$. **Cela implique que la section (A) est plus efficace que la section (B) :** pour un moment de flexion donné, la contrainte est plus faible dans la section (A).

Rappel : $|\sigma_{x, max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{|M_z(x)|}{S}$. Ici $S_A > S_B$

Mais pour une comparaison juste, nous devons le rapporter à la masse de la poutre, c'est-à-dire à la section transversale de la poutre

Surface (A) = 1200 cm²

Surface (B) = 432 cm²

$$S_A = \frac{I_A}{c} = \frac{bd^2}{6}$$

$$S_B = \frac{I_I}{c} = \frac{bd^3 - (b - b_1)d_1^3}{6d}$$

Pour (A) $S_A/\text{Area}_A = 0.066 \text{ m}$

Pour (B) $S_B/\text{Area}_B = 0.1 \text{ m}$

Cela implique que la section (B) est plus efficace (pour une section de poutre, qui est normalisée par le poids de la poutre par unité de longueur).